



TITLE:

空間非一様定常解周りの線形化
Vlasov方程式 (力学系の作る集団ダイナミクス: 保存系・散逸系の枠組みを越えて)

AUTHOR(S):

小川, 駿

CITATION:

小川, 駿. 空間非一様定常解周りの線形化Vlasov方程式 (力学系の作る集団ダイナミクス: 保存系・散逸系の枠組みを越えて). 数理解析研究所講究録 2013, 1827: 97-107

ISSUE DATE:

2013-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194779>

RIGHT:

空間非一様定常解周りの線形化 Vlasov 方程式

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻: 小川 駿

Shun Ogawa

Department of Applied Mathematics and Physics,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

概要

長距離相互作用を有するハミルトン系の空間非一様な準定常状態におけるマクロな物理量の外力への応答を線形化 Vlasov 方程式の範疇で求めた. ハミルトニアン平均場モデルを用いて感受率を精確に求め, 数値シミュレーションによるテストを行った. このとき, 初期状態が熱平衡状態であっても, 感受率の臨界指数は平衡統計力学から導出される値と異なることが見られた. さらに, 理論の応用として, 振動外場への応答を調べることで準定常状態におけるダイナミクスに関する情報を得られることを示す.

1 はじめに

長距離相互作用を有する多体系は, ただちに熱平衡状態へ緩和せずに, しばしば準定常状態と呼ばれる非平衡状態に長時間トラップされる [1]. 例えば, 楕円銀河や木星の大赤斑, プラズマ結晶 [2] などは準定常状態にあると考えられている. この様に, 銀河のスケールから実験室内まで, 自然界の様々なスケールで現れる準定常状態を統一的に理解するための統計力学や運動論による理論的な研究は自然科学の重要な課題の一つである.

この準定常状態は Vlasov 方程式 (無衝突 Boltzmann 方程式) の安定定常解に対応する [1, 3, 4]. 準定常状態における統計物理学に関する研究結果は近年活発に報告されているが, 準定常状態にある系に対し, 外力を加えるようなセットアップは最近まで注目されていなかった. 外力による操作を考えることは, 将来, 準定常状態にある系に対する熱力学的な理論を構築する際に必要であり, さらに, 実験的な研究を提案する際にも重要であると考えられる. 最近, 準定常状態にある系に外力を加えた際の系の変化を調べるために, Vlasov 方程式に基づいた線形応答理論が提案された [5]. この線形応答理論によって, 空間一様な準

定常状態における応答の長時間後の振舞いが分散関数 (誘電関数) で陽に表せることが示された. 一方, 空間非一様な準定常状態における応答は, 分散関数が複雑になることもあり, 議論されていなかった.

そこで, 周期境界条件が課された空間 1 次元系について, 空間非一様な準定常状態においても, 周期的に振動する外力と一定の外力に対し, 任意の物理量に現れる線形応答を分散関数を用いて陽に表せることを示す. さらに, 長距離相互作用系の研究において非常に有用なトイモデルであるハミルトニアン平均場 (HMF) モデル [6] を用いて具体的な計算と応用を行う. まずは, 線形応答理論で得られた感受率と, Vlasov 方程式を数値的に時間発展させて得られた感受率とを比べ, 理論の正しさを検証する. 次に, この線形応答理論の応用として, 系の外場に対する応答を観測することで準定常状態における系の情報を得る方法を提示する.

ここで述べられている結果は, 山口義幸氏との共同研究 [7] に基づく.

2 Vlasov 方程式

周期境界条件が課された, 空間 1 次元の N 体ハミルトニアン

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N V(q_i - q_j) + \sum_{i=1}^N \Phi_{\text{ext}}(q_i, p_i, t) \quad (1)$$

$$p_i \in \mathbb{R}, q_i \in [-\pi, \pi), i = 1, 2, \dots, N,$$

を持つ系を用いる. Φ_{ext} は外場であり, $t \leq 0$ では $\Phi_{\text{ext}}(t) = 0$ であるとする. 極限 $N \rightarrow \infty$ を取ると, この系の状態は 1 体分布関数 $f(q, p, t)$ で記述され, この 1 体分布関数の時間発展は Vlasov 方程式,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}_0[f] + \Phi_{\text{ext}}, f\} = 0,$$

$$\mathcal{H}_0[f] = \frac{p^2}{2} + \mathcal{V}[f](q, t), \quad (2)$$

$$\mathcal{V}[f](q, t) \equiv \iint V(q - q') f(q', p', t) dq' dp'$$

に従う. $\{a, b\}$ は Poisson 括弧であり, 次のように定義される.

$$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial b}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial b}{\partial p}. \quad (3)$$

3 空間非一様準定常状態における線形応答理論: 理論編

ハミルトン系 (1) を用いて, 空間非一様準定常状態における線形応答理論を紹介する. まず, 系は時刻 0 まで Vlasov 方程式 (2) の安定定常解 $f_0(q, p)$ に対応する空間非一様な準定常状態にあるとする. 時刻 0 から弱い外場 Φ_{ext} をかけ, 外場により生じた 1 体分布関数の初期分布からのずれを $f_1(q, p, t) \equiv f(q, p, t) - f_0(q, p)$ とする. ここで, ある物理量 $B(q, p)$ の外場に対する応答,

$$\langle B \rangle_1(t) \equiv \iint_{\mu} B(q, p) f_1(q, p, t) dq dp \quad (4)$$

を $O(\Phi_{\text{ext}})$ のオーダーまで求める.

まずは, f_1 が満たす関係式を求める. ここでは Kubo の線形応答理論 [8, 9] と似た方法を用いる. f_1 は次の線形化 Vlasov 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} &= \mathcal{L}_0[f_1] - \{\mathcal{V}[f_1], f_0\} - \{\Phi_{\text{ext}}, f_0\}, \\ \mathcal{L}_0[g] &\equiv -\{\mathcal{H}[f_0], g\}, \end{aligned} \quad (5)$$

に従う. これを形式的に解くと,

$$f_1(t) = - \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}_0} (\{\mathcal{V}[f_1](s), f_0\} + \{\Phi_{\text{ext}}(s), f_0\}) ds \quad (6)$$

を得る. 両辺に $B(q, p)$ を乗じてから μ 空間上で積分をすると,

$$\langle B \rangle_1(t) = - \iint dq dp \int_0^t B \circ \phi_0^{t-s} (\{\mathcal{V}[f_1](s), f_0\} + \{\Phi_{\text{ext}}(s), f_0\}) ds \quad (7)$$

を得る. ただし, ϕ_0^t は初期安定定常解 f_0 に対する 1 体ハミルトニアン $\mathcal{H}_0[f_0](q, p)$ のフローである. 1 体ハミルトニアン $\mathcal{H}_0[f_0](q, p)$ は完全可積分であるから, そのフローは作用角変数 (θ, J) を用いて,

$$\phi_0^t(\theta, J) = (\theta + \Omega(J)t, J), \quad \Omega(J) \equiv \frac{d\mathcal{H}_0[f_0]}{dJ}, \quad (8)$$

で表される. 式 (7) の両辺には f_1 が含まれているので, まだ応答が求められたわけではない. 方程式 (7) から陽的に応答を求める.

空間成分については周期境界条件が課されているので, f_1 と V を次のように Fourier 級数展開できる.

$$f_1(q, p, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_1 e^{ikq}, \quad V(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k e^{ikq}. \quad (9)$$

秩序変数 $\rho_{1,k}$ を

$$\rho_{1,k}(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ikq} \rangle_1 \quad (10)$$

で定義する. (9) と (10) を用いると,

$$\mathcal{V}[f_1](q, t) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k \rho_{1,k}(t) e^{ikq} \quad (11)$$

を得る. ここで B として $E^k(q) = e^{-ikq}$ を採用し, (10) と (11) を陰的な関係式 (7) に代入すると,

$$\rho_{1,k}(t) = - \int_0^t ds \iint_{\mu} E^k \circ \phi_0^s \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{v}_l \{E^{-l}, f_0\} \rho_{1,l}(s) + \frac{1}{2\pi} \{\Phi_{\text{ext}}(s), f_0\} \right) dq dp \quad (12)$$

を得る. ここで右辺が畳み込みになっていることに着目し, 両辺に Laplace 変換

$$\tilde{a}(\omega) = \int_0^\infty a(t) e^{i\omega t} dt \quad (13)$$

を施す. すると, 積分方程式 (12) は次の代数方程式になる.

$$\tilde{\rho}_1(\omega) = F(\omega) \tilde{\rho}_1(\omega) + \varphi(\omega). \quad (14)$$

ただし, $\mathbb{I} = \{m \in \mathbb{Z} | \hat{v}_m \neq 0\}$, $\sharp \mathbb{I}$ は \mathbb{I} の元の個数を表すとして, $\tilde{\rho}_1 = (\tilde{\rho}_{1,k}(\omega))_{k \in \mathbb{I}}$, $F(\omega) = (F_{kl}(\omega))_{(k,l) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}}$, $\varphi(\omega) = (\varphi_k(\omega))_{k \in \mathbb{I}}$ は各々 $\sharp \mathbb{I}$ 次のベクトルや正方行列である. F と φ の各成分は

$$\tilde{E}_\omega^k = \int_0^\infty E^k \circ \phi_0'(q) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{ik(\Omega(J) - \omega)} \quad (15)$$

を用いて, 次のように書ける.

$$\begin{aligned} F_{kl}(\omega) &= -\hat{v}_l \iint_{\mu} \tilde{E}_\omega^k \{E^{-l}, f_0\} dq dp, \\ \varphi_k(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mu} \tilde{E}_\omega^k \{\tilde{\Phi}_{\text{ext}}(\omega), f_0\} dq dp. \end{aligned} \quad (16)$$

$\rho_{1,k}(t)$ は代数方程式 (14) を解き, 逆 Laplace 変換をすることにより, 形式的に次のように求めることができる.

$$\rho_{1,k}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} (1 - F(\omega))^{-1} \varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (17)$$

次に, HMF モデルを用いて具体的な計算を行う. HMF モデルでは $\mathbb{I} = \{-1, +1\}$ であり, $\sharp \mathbb{I} = 2$ である. さらに行列 F の非対角成分は 0 になる [10] ので具体的な計算が可能である.

4 空間非一様準定常状態における線形応答理論: HMF モデル

HMF モデルについて, 前節で提示した線形応答理論を用い, 具体的に感受率を求める.

4.1 HMF モデルにおける線形応答理論

HMF モデルのハミルトニアンは

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} (1 - \cos(q_i - q_j)) - h(t) \sum_{i=1}^N \cos q_i, \quad (18)$$

$$p_i \in \mathbb{R}, \quad q_i \in [-\pi, \pi), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

である. $h(t)$ は外場であり, $t \leq 0$ では $h(t) = 0$ であるとする. この系の状態は 1 体分布関数 $f(q, p, t)$ で記述され, この 1 体分布関数の時間発展は Vlasov 方程式,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}_0[f] - h(t) \cos q, f\} = 0, \quad (19)$$

$$\mathcal{H}_0[f] = \frac{p^2}{2} - \iint \cos(q - q') f(q', p', t) dq' dp'$$

に従う. 定常解 $f_0(q, p)$ の周りの摂動 $f_1(q, p, t)$ が従う線形化 Vlasov 方程式は次の通りである.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\{\mathcal{H}_0[f_0], f_1\} + \{M_x[f_1] \cos q + M_y[f_1] \sin q + h \cos q, f_0\}. \quad (20)$$

HMF モデルの秩序変数は $\vec{M} = (M_x, M_y)$,

$$M_x[f](t) = \iint \cos q f(q, p, t) dq dp, \quad M_y[f](t) = \iint \sin q f(q, p, t) dq dp \quad (21)$$

である. M_x と M_y の外場 ($h_x(t), h_y(t)$) に対する線形応答は, 分散関数 $D_x(\omega), D_y(\omega)$ を用いて, 次のように表される [7].

$$M_{1,x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{1 - D_x(\omega)}{D_x(\omega)} \tilde{h}_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (22)$$

$$M_{1,y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{1 - D_y(\omega)}{D_y(\omega)} \tilde{h}_y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

分散関数 $D_x(\omega)$ と $D_y(\omega)$ は、各々、角変数 (θ, J) を用いて、次のように表される。

$$\begin{aligned} D_x(\omega) &= 1 + 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_L \frac{m \tilde{f}'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |C^m(J)|^2 dJ, \\ D_y(\omega) &= 1 + 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_L \frac{m \tilde{f}'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |S^m(J)|^2 dJ. \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 $\tilde{f}_0(J(q, p)) = f_0(q, p)$ であり、 $C^m(J)$ と $S^m(J)$ は次のように定義されている。

$$C^m(J) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos q(\theta, J) e^{-im\theta} d\theta, \quad S^m(J) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin q(\theta, J) e^{-im\theta} d\theta. \quad (24)$$

ここで、初期の準定常状態に対応する分布関数、1 体エネルギー、秩序変数は各々

$$f_0(q, p) = F_0(\epsilon(q, p)), \quad \epsilon(q, p) = \frac{p^2}{2} - M_0 \cos q, \quad \vec{M}[f_0] = (M_0, 0)^T, \quad (25)$$

で表されるとし、外場 $\vec{h}(t) = (h\Theta(t) \cos(\omega_{\text{ext}} t), 0)^T$ に対する秩序変数 M_x の応答を線形化 Vlasov 方程式の範疇で求める。ただし、 $\Theta(t)$ は Heaviside 関数である。線形応答の式 (22) より、応答は $D_x(\omega)$ の根、 $\tilde{h}_x(\omega)$ の極と $D_x(\omega)$ のブランチカットからの寄与 [11] で決定される。今、初期分布 f_0 は Vlasov 方程式の安定定常解であるとしているので、 $D_x(\omega) = 0$ なる ω は下半平面のみに存在する。従って、分散関数の 0 点からの寄与は指数関数的にただちに減衰してしまう [12]。また、分散関数のブランチカットからの寄与はベキ的に減衰する [11] ので、長時間後の線形応答 $M_{1,x}(t)$ の振舞いは次のように求まる。

$$\begin{aligned} M_{1,x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{1 - D_x(\omega)}{D_x(\omega)} \tilde{h}_x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &\sim \frac{h}{2} \left[\frac{1 - D_x(\omega_{\text{ext}})}{D_x(\omega_{\text{ext}})} e^{-i\omega_{\text{ext}} t} + \frac{1 - D_x(-\omega_{\text{ext}})}{D_x(-\omega_{\text{ext}})} e^{i\omega_{\text{ext}} t} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

4.2 感受率

線形応答の式 (26) に $\omega_{\text{ext}} = 0$ を代入すると感受率 χ_x

$$\chi_x \equiv \left. \frac{dM_x}{dh_x} \right|_{h_x=0} = \frac{1 - D_x(0)}{D_x(0)} \quad (27)$$

を得る。ただし、 $D_x(0)$ は

$$\begin{aligned} D_x(0) &= 1 + \iint \cos^2 q \frac{\partial f_0}{\partial p}(q, p) dq dp - \frac{4}{\sqrt{M_0}} \int_0^1 K(k) \left(\frac{2E(k)}{K(k)} - 1 \right)^2 \frac{d\bar{f}_0}{dk}(k) dk \\ &\quad - \frac{4}{\sqrt{M_0}} \int_1^\infty \frac{K(1/k)}{k} \left(\frac{2k^2 E(1/k)}{K(1/k)} + 1 - 2k^2 \right)^2 \frac{d\bar{f}_0}{dk}(k) dk \end{aligned} \quad (28)$$

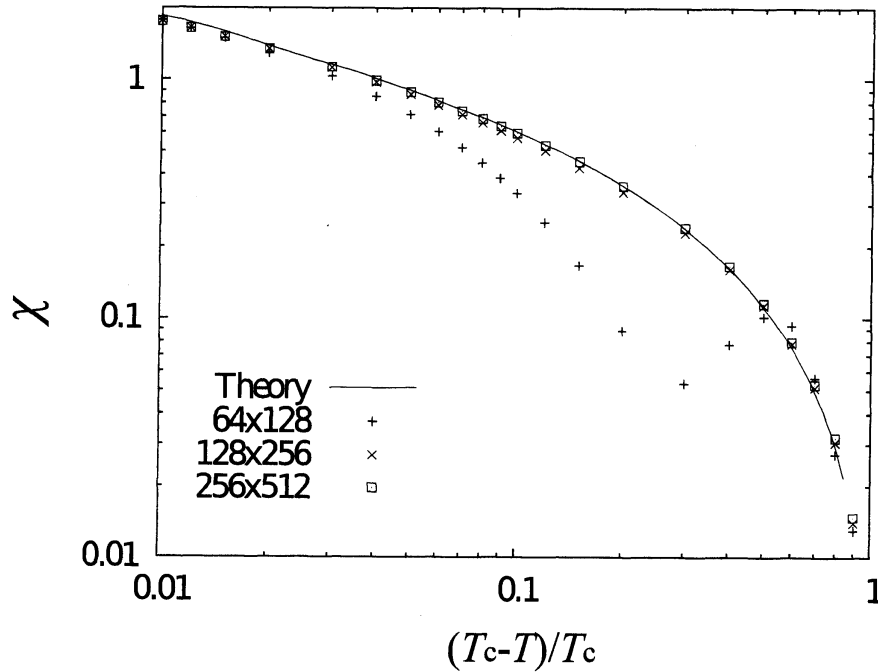


図1 秩序相 ($T < T_c = 1/2$) において, 線形応答理論で得られた感受率 χ_x とシミュレーションにより得られた $M_{1,x}/h_x$ を比較した. ここでは $h_x = 0.005$ としている. シミュレーションによる結果は, 各々相空間 (q, p) の刻みを 64×128 , 128×256 , 256×512 として, semi-Lagrangian 法により得られた結果である. $M_{1,x}$ の値は, $200 \leq t \leq 500$ での時間平均である.

である [7]. E と K は第 1, 2 種完全楕円積分 [13] であり,

$$k = \sqrt{\frac{\epsilon + M_0}{2M_0}}, \quad \bar{f}_0(k(q, p)) = f_0(q, p) \quad (29)$$

である. ここで, 初期準定常状態 f_0 として Maxwell-Boltzmann 分布

$$f_0(q, p) = \frac{1}{2\pi I_0(\beta M_0)} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left(-\beta\left(p^2/2 - M_0 \cos q\right)\right) \quad (30)$$

を採用し, 具体的に χ_x を計算する. ただし, $I_k(z)$ は k 次の第 1 種変形 Bessel 関数 [13] である. また, 秩序相のみを考察の対象にするので, $\beta = 1/T > 2$ である. ここで得られた χ_x と, 数値シミュレーションの結果をあわせてプロットしたのが図 1 であり, 理論と数値シミュレーションの結果は一致していることが分かる. また, 臨界点に近づくと, $\chi_x \propto |\tau|^{-\gamma}$, $\gamma < 1/3$ であることも分かる. 通常の統計力学では $\gamma = 1$ である. ここで臨界温度を T_c で表し, $\tau = |T - T_c|/T_c$ とした.

ここまで、初期の秩序変数 $(M_0, 0)^T$ に平行な外場に対する応答しか扱ってこなかったが、垂直な外場への応答についてコメントする。初期の秩序変数 $(M_0, 0)^T$ と垂直な外場 $(0, h_y \Theta(t))^T$ をかけると、秩序変数の外場に対する線形応答は

$$M_{1,y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{1 - D_y(\omega)}{D_y(\omega)} \frac{h_y}{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \quad (31)$$

で表される。条件 (25) を満たす f_0 に対して、常に $D_y(0) = 0$ が満たされるので [14], (31) の被積分関数は $\omega = 0$ に 2 位以上の極を持つ。故に、 $M_{1,y}(t) \geq O(t)$ となり、ただちに線形近似が成立しなくなる。これは秩序変数 \vec{M} が無限小のエネルギーで、大きさを保ったまま自由に方向を変えられることを意味している。

5 空間非一様準定常状態における線形応答理論: 応用編

ここでは、外力に対する系の応答を見ることで、準定常状態にある系に関する情報を得る。空間非一様定常解に関する分散関係 $D_x(\omega) = 0$ を解いて Landau 極 ω_L を見つけることは、分散関数の形が複雑であることと、その多価性 [10] から数値的にであっても困難である。そこで、前節までの線形応答理論と共鳴吸収現象 [9] を応用することで、振動外場をプローブ場として用い、分散関係を解かずに Landau 極 ω_L の位置を見積もる。

振動外場 $h(t) = h\Theta(t) \cos(\omega_{\text{ext}} t)$ が 1 周期の間に系になす仕事、あるいは系が振動外場から受け取るエネルギーは

$$\begin{aligned} \overline{W}(\omega_{\text{ext}}) &= \frac{\omega_{\text{ext}}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_{\text{ext}}} h(t) \frac{dM(t)}{dt} dt \\ &= \frac{h^2 \omega_{\text{ext}}}{2} \text{Im} \left(\frac{1 - D(\omega_{\text{ext}})}{D(\omega_{\text{ext}})} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

である。ここで、次の事実、

$$D(\omega) = D(-\omega^*)^*, \quad \forall \omega \in \mathbb{C} \quad (33)$$

と次の仮定、

$$1 - D(\omega) \sim 1, \quad D(\omega) = (\omega - \omega_L)(\omega + \omega_L^*)\varphi_0 \quad (34)$$

(ただし φ_0 は定数) を用いると、 $\overline{W}(\omega_{\text{ext}})$ は

$$\omega_{\text{ext}} \sim \pm |\omega_L| \quad (35)$$

で最大値を取ることが分かる。最も重要な極は最も減衰率が小さい極であり、この極は $\text{Im}(\omega_L) \ll \text{Re}(\omega_L)$ を満たしていると考えられる。この関係が満たされていることにより、

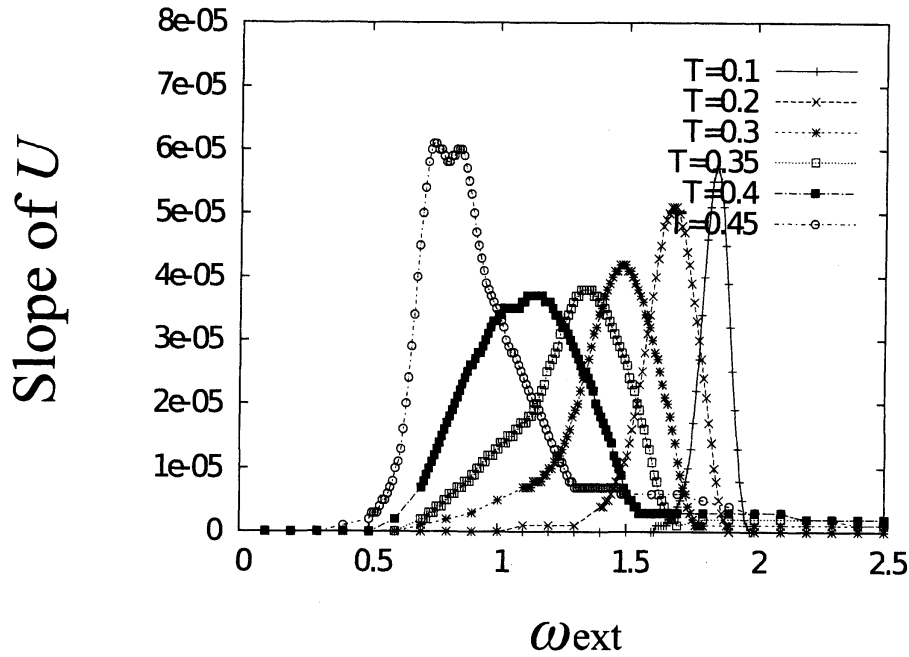


図2 エネルギー取得率を振動外場の振動数 ω_{ext} の関数としてグラフに表した. 相空間 (q, p) の刻みは 128×256 である. エネルギー取得率は内部エネルギー $U(t)$ の $0 \leq t \leq 100$ での傾きから得られている.

本来, (35) では \bar{W} の最大点と関係づけられているのは Landau 極 ω_L の絶対値だけであるが, ω_L の位置を見積もることが可能になっている.

実際にいくつかの温度における Maxwell-Boltzmann 分布 (30) に対する $\bar{W}(\omega_{\text{ext}})$ のグラフを図2に表した. さらにそのピークの位置と, 先行研究 [10] において分散関係を解くことにより得られた Landau 極を表1にまとめた. これらの結果から次のことが言える:

- エネルギー取得率のピークを調べることにより, Landau 極の大体の位置を見積もる

表1 先行研究 [10] で得られた $|\omega_L|$ と図2におけるピークの位置をまとめた. $T = 0.45$ では, ピークは 0.75 と 0.84 の2カ所に現れている.

T	0.2	0.3	0.35	0.4	0.45
$ \text{Re}\omega_L $	1.7	1.4	1.2	0.8	0.6
$-\text{Im}\omega_L$	0.08	0.15	0.22	0.30	0.18
$ \omega_L $	1.7	1.4	1.2	0.9	0.6
Peak position in Fig.2	1.68	1.48	1.34	1.14	0.75/0.84

ことが出来ている.

- 図 2 では $T = 0.45$ で $\omega_{\text{ext}} = 0.75, 0.84$ の 2 カ所にピークが現れた. $T = 0.4$ のグラフにもその兆候が見られる. これは, 温度を変化させることにより, 最も減衰率の低い Landau 極の入れ替わりが起こることを示唆している. 実際に先行研究 [10] において, 分散関係を直接解くことでその様な極の入れ替わりが起こることが示されている.

6 まとめ

周期境界条件が課された空間 1 次元系の空間非一様準定常状態について, Vlasov 方程式を基にした線形応答理論の一般論を紹介した. この結果は, 双直交関数系 [3, 11] を用いることによって, 周期境界条件を持たない高次元の系にも拡張できる. ただし, 1 体ハミルトニアン $\mathcal{H}_0[f_0]$ の非摂動部分は完全可積分であることが必要である.

この線形応答理論によって, 空間非一様準定常状態における感受率を求めた. HMF モデルを用いて, 線形応答理論から得た感受率と, Vlasov 方程式を数値的に時間発展させて得た感受率を比較したところ, 理論と数値計算の結果は一致した. さらに, 初期状態が熱平衡状態であっても, この感受率の臨界指数 γ は $\gamma < 1/3$ であり, 平衡統計力学から導出される臨界指数 $\gamma = 1$ と異なることを観測した. 低温側の臨界指数 γ に関する研究は現在進行中である.

Vlasov 方程式における線形応答理論の応用例として, 系に外力をかけて, それに対する応答を調べることで, 準定常状態にある系の情報を得る方法を提案した. 振動外場をプローブ場として用い, 共鳴吸収現象を利用して非一様準定常状態の分散関係の根 (Landau 極) の位置を見積もることができることを示した. また, 温度などのパラメータを変えた際に起こる, 主となる Landau 極の入れ替わり [10] を分散関係を解かずとも定性的に確認することができた.

参考文献

- [1] A. Campa, T. Dauxois and S. Ruffo, Phys. Rep. **480**, 57 (2009).
- [2] Y. Kiwamoto, Y. Kawai, Y. Soga, and J. Aoki, Plasma and Fusion Research, **5**, S2002 (2010).
- [3] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics (Second Edition)* (Princeton university

- press, 2008).
- [4] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois and S. Ruffo, *Physica A* **337**, 36 (2004).
 - [5] A. Patelli, S. Gupta, C. Nardini and S. Ruffo, *Phys. Rev. E* **85**, 021133 (2012).
 - [6] M. Antoni and S. Ruffo, *Phys. Rev. E*, **52**, 2361 (1995).
 - [7] S. Ogawa and Y. Y. Yamaguchi, *Phys. Rev. E* **86**, 061115 (2012).
 - [8] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570 (1957).
 - [9] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical physics II. Nonequilibrium statistical mechanics* (Springer, 1985).
 - [10] J. Barre , A. Olivetti and Y. Y. Yamaguchi, *J. Stat. Mech.* P08002 (2010).
 - [11] J. Barré, A. Olivetti and Y. Y. Yamaguchi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **44**, 405502 (2011).
 - [12] L. D. Landau, *J. Phys. U.S.S.R.* **10**, 25 (1946). *Collected papers of L. D. Landau* edited by D. T. Haar (1965).
 - [13] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Dover, New York, 1972).
 - [14] A. Campa and P. H. Chavanis, *J. Stat. Mech.* P06001 (2010).